2021 鳥取大医 [1]

(1) $2^k \leqq n < 2^{k+1}$ のとき $D(n)=k+1$

$a_n = b_1\left(\frac{1}{2}\right)^1 + b_2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + b_k\left(\frac{1}{2}\right)^k + 1\times\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$

$a_{n-2^k} = b_1\left(\frac{1}{2}\right)^1 + b_2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + b_k\left(\frac{1}{2}\right)^k$ であるから

$a_n = \underline{a_{n-2^k} + \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}$ …(答)

(2) $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $T_k = S_{2^k-1}$ とおく

$2^k \leqq n < 2^{k+1}$ となる n は 2^k コあるので、

$T_1 = S_1 = a_0 + a_1 = \frac{1}{2}$

$T_2 = S_{2^2-1} = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = T_1 + T_1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 2 = \frac{3}{2}$

$T_3 = S_{2^3-1} = (a_0 + a_1 + a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7)$

$= 2T_2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 2^2 = \frac{7}{2}$

以下同様にくり返して

$T_4 = S_{15} = \frac{15}{2}$, $T_5 = S_{31} = \frac{31}{2}$, $T_6 = S_{63} = \frac{63}{2}$, $T_7 = S_{127} = \frac{127}{2}$ を得る

よって

$S_{130} = S_{127} + a_{128} + a_{129} + a_{130} = \frac{127}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^8 \times 3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \underline{\underline{\frac{16451}{256}}}$ …(答)

(3) $a_n = b_1\left(\frac{1}{2}\right) + b_2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + b_{D(n)}\left(\frac{1}{2}\right)^{D(n)}$

(i) $n = 2^k$ のとき $D(n) = k+1$

$k \geqq 2$ より $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} < \frac{1}{4}$ で適する

(ii) $0 \leqq n < 2^k$ のとき $D(k) \leqq k$

$b_1 = 1$ または $b_2 = 1$ のとき $a_n \geqq \frac{1}{4}$ で不適

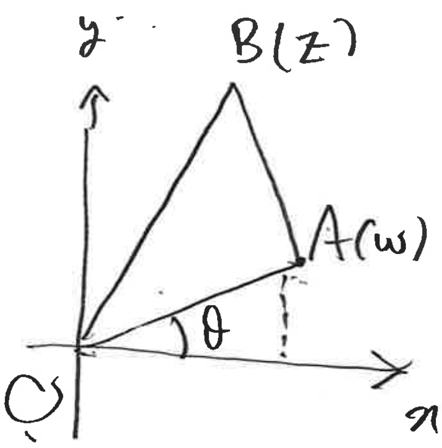
$b_1 = b_2 = 0$, $b_3 = b_4 = \cdots = b_k = 1$ とすると

$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{\frac{1}{8}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}\right\}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}\right\} < \frac{1}{4}$ で適する

よって $b_3, b_4, \cdots, b_k$ の $k-2$ コの $0, 1$ の選び方の 2^{k-2} 個ある。

(i)(ii)より $a_n < \frac{1}{4}$ となる n は $\underline{\underline{2^{k-2} + 1}}$ (個) …(答)

2021 鳥取 医[II], 工[II]



(1) $w=\sqrt{3}(\cos\theta+i\sin\theta)\ (0\leqq\theta<2\pi)$ とおく

$$z=\frac{w}{w+1}$$
$$=\frac{\sqrt{3}\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta\cdot i}{(\sqrt{3}\cos\theta+1)+\sqrt{3}\sin\theta\cdot i}\times\frac{(\sqrt{3}\cos\theta+1)-\sqrt{3}\sin\theta\cdot i}{(\sqrt{3}\cos\theta+1)-\sqrt{3}\sin\theta\cdot i}$$
$$=\frac{\sqrt{3}\cos\theta+3}{2\sqrt{3}\cos\theta+4}+\frac{\sqrt{3}\sin\theta}{2\sqrt{3}\cos\theta+4}i$$ であるから

$$S=\frac{1}{2}\left|\sqrt{3}\cos\theta\times\frac{\sqrt{3}\sin\theta}{2\sqrt{3}\cos\theta+4}-\sqrt{3}\sin\theta\times\frac{\sqrt{3}\cos\theta+3}{2\sqrt{3}\cos\theta+4}\right|$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{|3\sqrt{3}\sin\theta|}{2\sqrt{3}\cos\theta+4}$$

ここで $w+\overline{w}=2\sqrt{3}\cos\theta$, $w-\overline{w}=2\sqrt{3}\sin\theta$ から

$$S=\frac{1}{2}\times\frac{\left|3\times\frac{w-\overline{w}}{2}\right|}{w+\overline{w}+4}=\underline{\underline{\frac{3|w-\overline{w}|}{4(w+\overline{w}+4)}}}\cdots(答)$$

(2) (1)より $f(\theta)=\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{3}\cos\theta+2}$ とおくと $S=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}|f(\theta)|$

$$f'(\theta)=\frac{\cos\theta(\sqrt{3}\cos\theta+2)-\sin\theta\cdot(-\sqrt{3}\sin\theta)}{(\sqrt{3}\cos\theta+2)^2}$$
$$=\frac{2\cos\theta+\sqrt{3}}{(\sqrt{3}\cos\theta+2)^2}$$

$f'(\theta)=0$ となるのは $\cos\theta=\dfrac{-\sqrt{3}}{2}$, $0\leqq\theta<2\pi$ より $\theta=\dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{7}{6}\pi$

θ	0	…	$\frac{5}{6}\pi$	…	$\frac{7}{6}\pi$	…	2π
$f'(\theta)$		+	0	−	0	+	
$f(\theta)$	0	↗	1	↘	−1	↗	0

増減表より $|f(\theta)|$ は $\theta=\frac{5}{6}\pi,\ \frac{7}{6}\pi$ で最大値 1 で $S=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

$\theta=\frac{5}{6}\pi$ のとき $w=\sqrt{3}\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi\right)=\dfrac{-3}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ から $w+1=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi$

$\dfrac{OB}{OA}=\dfrac{|z|}{|w|}=\dfrac{1}{|w+1|}=1$, $\angle AOB=\left|\arg\dfrac{z}{w}\right|=|-\arg(w+1)|=\dfrac{2}{3}\pi$

$\theta=\frac{7}{6}\pi$ のときも同様である。

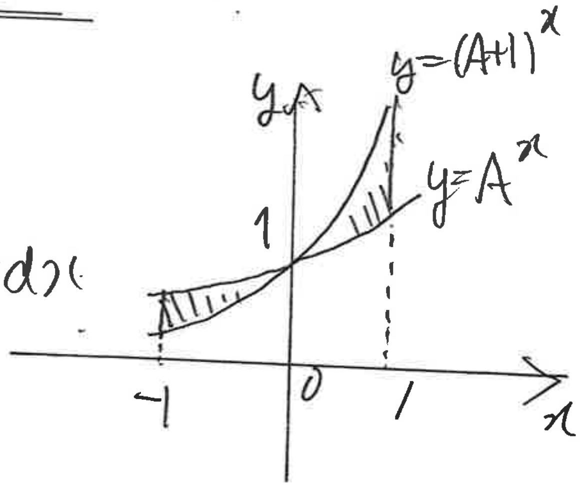
よって S の最大値は $\underline{\dfrac{3\sqrt{3}}{4}}$, $\triangle OAB$ は $\underline{OA=OB,\ \angle AOB=\frac{2}{3}\pi\ の二等辺三角形}\cdots(答)$

2021 鳥取 医 [Ⅲ]

(1) $f(x)=a^x$ から $f'(x)=a^x\log a$ …(答)

(2) $S(A)=\int_{-1}^{0}\{A^x-(A+1)^x\}dx$

$+\int_{0}^{1}\{(A+1)^x-A^x\}dx$



$=\left[\frac{A^x}{\log A}-\frac{(A+1)^x}{\log(A+1)}\right]_{-1}^{0}$

$+\left[\frac{(A+1)^x}{\log(A+1)}-\frac{A^x}{\log A}\right]_{0}^{1}$

$=\left(\frac{1}{\log A}-\frac{1}{\log(A+1)}\right)\times 2-\left(\frac{\frac{1}{A}}{\log A}-\frac{\frac{1}{A+1}}{\log(A+1)}\right)$

$+\left(\frac{A+1}{\log(A+1)}-\frac{A}{\log A}\right)$

$=\left(A-1+\frac{1}{A+1}\right)\frac{1}{\log(A+1)}+\left(2-A-\frac{1}{A}\right)\frac{1}{\log A}$ …(答)

(3) $S(A)\log A=A\left(\frac{\log A}{\log(A+1)}-1\right)+\frac{-A}{A+1}\cdot\frac{\log A}{\log(A+1)}+2-\frac{1}{A}$

ここで

$\lim_{A\to\infty}A\left(\frac{\log A}{\log(A+1)}-1\right)=\lim_{A\to\infty}\frac{A\log\frac{A}{A+1}}{\log(A+1)}=\lim_{A\to\infty}\frac{-\log\left(1+\frac{1}{A}\right)^A}{\log(A+1)}=0$

$\lim_{A\to\infty}\frac{-A}{A+1}\times\frac{\log A}{\log(A+1)}=\lim_{A\to\infty}\frac{-1}{1+\frac{1}{A}}\cdot\frac{-\log A}{\log\frac{A+1}{A}+\log A}$

$=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{A}}\times\frac{-1}{\frac{\log\left(1+\frac{1}{A}\right)}{\log A}+1}=-1$ から

$\lim_{A\to\infty}S(A)\log A=0-1+2=1$ …(答)

2021 鳥取医 [IV]

(1) $0 \leqq x \leqq p \leqq 1$ のとき $\dfrac{x^m}{1+x^2} \leqq x^m$ であるから

$$\int_0^p \frac{x^m}{1+x^2}dx < \int_0^p x^m dx = \left[\frac{x^{m+1}}{m+1}\right]_0^p = \frac{p^{m+1}}{m+1} \leqq \frac{1}{m+1}$$

$$\therefore \int_0^p \frac{x^m}{1+x^2}dx < \frac{1}{m+1} \quad \cdots(答)$$

(2) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{p^{2k-1}}{2k-1} = p - \frac{p^3}{3} + \frac{p^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{p^{2n-1}}{2n-1}$

一方 $\dfrac{1-(-1)^n x^{2n}}{1+x^2} = \dfrac{1-(-x^2)^n}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-x^2)^{n-1}$ であるから

$$J_n = \int_0^p \{1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^{n-1}x^{2n-2}\}dx$$

$$= \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right]_0^p$$

$$= p - \frac{p^3}{3} + \frac{p^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{p^{2n-1}}{2n-1} = S_n \quad \therefore S_n = J_n \cdots(答)$$

(3) $p = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とすると $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2k-1}}{2k-1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{(2k-1)3^{k-1}}$

また (1) より

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{x^{2n}}{1+x^2}dx < \frac{1}{2n+1} \text{ より } -\frac{1}{2n+1} < \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{-(-1)^n x^{2n}}{1+x^2} < \frac{1}{2n+1}$$

$$\therefore \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{1+x^2} - \frac{1}{2n+1} < J_n < \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{1+x^2} + \frac{1}{2n+1} \quad \cdots(*)$$

ここで $x = \tan\theta$ とおくと $dx = \dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$ 　$x: 0 \to \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\theta: 0 \to \frac{\pi}{6}$

$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{1+\tan^2\theta} \times \frac{1}{\cos^2\theta}d\theta = \frac{\pi}{6}$ であることと $J_n = S_n$ から

(*) 両辺に $\sqrt{3}$ をかけて

$$\frac{\sqrt{3}}{6}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2n+1} < \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)3^{k-1}} < \frac{\sqrt{3}}{6}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2n+1}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2n+1}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}\pi$ であるから

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)3^{n-1}} = \frac{\sqrt{3}}{6}\pi \quad \cdots(答)$$