2025 鳥取大 医

[1]

(1) 公比をrとすると①,②より $r>0$

③より) $a_1+a_1r+a_1r^2=4480$

$2^9\times5(1+r+r^2)=2^7\times5\times7$

$4(1+r+r^2)=7$

$(2r+3)(2r-1)=0$ $r>0$ より) $r=\frac{1}{2}$

$\therefore\ a_n=2^9\times5\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\underline{\underline{5\cdot2^{-n+10}}}$ …(答)

(2) $b_n=\log_2 a_n=\log_2 10\times2^{9-n}$

$=\log_2 10+9-n$

$b_n>0$ とすると $n<9+\log_2 10=9+\frac{1}{\log_{10}2}=9+\frac{1}{0.301}=12.3\ldots$

$\therefore\ 1\leqq n\leqq 12$ よってS_n最大となるのは $\underline{\underline{n=12}}$ …(答)

(3) $S_n=\sum_{k=1}^{n}b_k=\frac{n}{2}(b_1+b_n)=\frac{n}{2}(2\log_2 10+17-n)$

$=\frac{n}{2}\left(\frac{2}{\log_{10}2}+17-n\right)\fallingdotseq\frac{n}{2}(23.6-n)$ …(*)

ここで

$S_{23}>0,\ S_{24}<0,\ S_1>0$ であり

$|S_{23}|-|S_{24}|=\frac{23}{2}\left(\frac{2}{\log_{10}2}-6\right)-\left\{-\frac{24}{2}\left(\frac{2}{\log_{10}2}-7\right)\right\}$

$=\frac{47}{\log_{10}2}-153\fallingdotseq\frac{47}{0.301}-153=3.1\ldots>0$ より) $|S_{23}|>|S_{24}|$

$|S_1|-|S_{24}|=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\log_{10}2}+16\right)-\left\{-\frac{24}{2}\left(\frac{2}{\log_{10}2}-7\right)\right\}$

$=\frac{25}{\log_{10}2}-76\fallingdotseq\frac{25}{0.301}-76=7.0\ldots>0$ より) $|S_1|>|S_{24}|$

これと(*)から $y=|S_n|$ の2次関数のグラフを考えて

$|S_n|$が最小となるのは $\underline{\underline{n=24}}$ …(答)

2025 鳥取大・医[II]・医(生命, 保健)・工・獣医[III]

(1) $\dfrac{dx}{dt} = a e^{at}\cos t - e^{at}\sin t = \underline{\underline{e^{at}(a\cos t - \sin t)}}$ …(答)

$\dfrac{dy}{dt} = a e^{at}\sin t + e^{at}\cos t = \underline{\underline{e^{at}(a\sin t + \cos t)}}$ …(答)

(2) $|\vec{v}|^2 = \left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2 = e^{2at}(a\cos t - \sin t)^2 + e^{2at}(a\sin t + \cos t)^2$

$|\vec{v}|^2 = e^{2at}(a^2+1)(\sin^2 t + \cos^2 t) = e^{2at}(a^2+1)$

$|\vec{v}| \geqq 0$ より $|\vec{v}| = \underline{\underline{e^{at}\sqrt{a^2+1}}}$ …(答)

(3) $\vec{p} = (e^{at}\cos t,\ e^{at}\sin t)$ なので

$|\vec{p}|^2 = e^{2at}\cos^2 t + e^{2at}\sin^2 t = e^{2at}(\cos^2 t + \sin^2 t) = e^{2at}$

$|\vec{p}| \geqq 0$ より $|\vec{p}| = e^{at}$

$\vec{p}\cdot\vec{v} = e^{2at}(a\cos^2 t - \cos t\sin t) + e^{2at}(a\sin^2 t + \sin t\cos t)$

$= e^{2at} \times a(\cos^2 t + \sin^2 t)$

$\vec{p}\cdot\vec{v} = a e^{2at}$ なので

$\cos\theta = \dfrac{\vec{p}\cdot\vec{v}}{|\vec{p}||\vec{v}|} = \dfrac{a \times e^{2at}}{e^{at} \times e^{at}\sqrt{a^2+1}} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}$

ここで a は実数なので $-1 \leqq \dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}} \leqq 1$

また, $0 \leqq \theta \leqq \pi$ から $-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$

したがって, $\cos\theta$ の値は存在し, θ は t の値によらない定数である

(証明終)

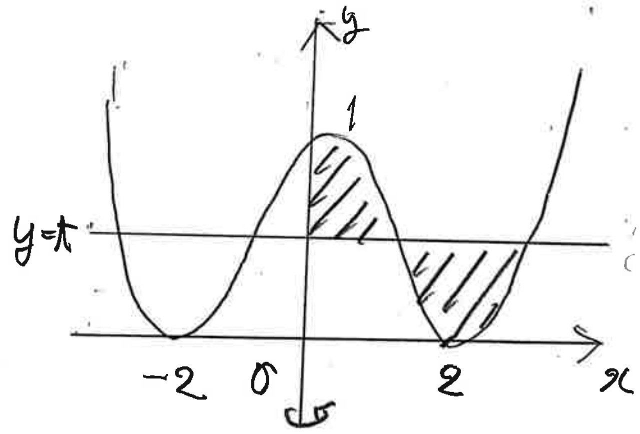
(4) $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ のとき, (3) より $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}} \Longleftrightarrow \sqrt{3(a^2+1)} = 2a$

$a \geqq 0$ において, 両辺を2乗すると, $3(a^2+1) = 4a^2$

$a^2 = 3$

$a \geqq 0$ より $a = \underline{\underline{\sqrt{3}}}$ …(答)

2025 鳥取 医[III]、工[IV]



(1) $t=\frac{1}{16}(x+2)^2(x-2)^2$ から

$(x^2-4)^2=16t$

$t\geqq 0$ より $x^2=4\pm4\sqrt{t}$

$\therefore\ R^2=4\pm4\sqrt{t}$ …(答)

(2) $y=\frac{1}{16}(x+2)^2(x-2)^2$ から $y\geqq 0$ で

$x^2=4\pm4\sqrt{y}$ から $x_1^2=4-4\sqrt{y}$, $x_2^2=4+4\sqrt{y}$ とすると

$$V(t)=\int_0^t(\pi x_2^2-\pi x_1^2)\,dy+\int_t^1\pi x_1^2\,dy$$

$$=\pi\int_0^t 8\sqrt{y}\,dy+\pi\int_t^1(4-4\sqrt{y})\,dy$$

$$=\pi\left[8\times\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_0^t+\pi\left[4y-4\times\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_t^1$$

$$=\pi\left(8t\sqrt{t}-4t+\frac{4}{3}\right)$$ …(答)

(3) $V'(t)=\pi(12\sqrt{t}-4)$

$V'(t)=0$ とすると $\sqrt{t}=\frac{1}{3}$ より $t=\frac{1}{9}$

t	0	…	$\frac{1}{9}$	…	1
$V'(t)$		$-$	0	$+$	
$V(t)$		↘	最小	↗	

よって $t=\frac{1}{9}$ のとき 最小値 $\frac{32}{27}\pi$ …(答)

2025 鳥取 医

[IV]

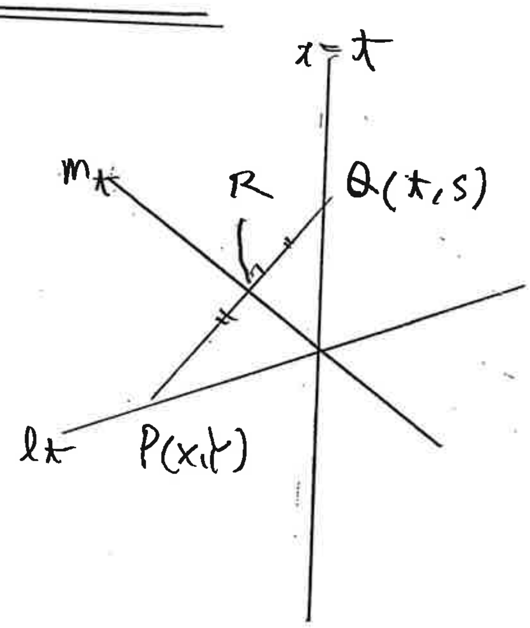
(1) $y=\frac{1}{2a}x^2$ から $y'=\frac{1}{a}x$

$\left(t, \frac{t^2}{2a}\right)$ における法線は

$y-\frac{t^2}{2a}=\frac{-a}{t}(x-t)$ $\therefore m_t: y=-\frac{a}{t}x+a+\frac{t^2}{2a}$ …(答)

(2) l_t上の点を $P(X, Y)$,

$x=t$ 上の点を $Q(t, s)$ とおく。



PQの中点を $R\left(\frac{X+t}{2}, \frac{Y+s}{2}\right)$ とすると

Rは m_t上より

$\frac{Y+s}{2}=-\frac{a}{t}\times\frac{X+t}{2}+a+\frac{t^2}{2a}$

$\therefore Y=-\frac{a}{t}X+a+\frac{t^2}{a}-s$ …①

また $PQ\perp m_t$ より $-\frac{a}{t}\times\frac{Y-s}{X-t}=-1$

$\therefore s=Y-\frac{t}{a}X+\frac{t^2}{a}$ …②

②を①に代入して整理

$2Y=\left(\frac{-a}{t}+\frac{t}{a}\right)X+a$

$Y=\frac{t^2-a^2}{2at}X+\frac{a}{2}$

$\therefore l_t: y=\frac{t^2-a^2}{2at}x+\frac{a}{2}$ より 傾き $\frac{t^2-a^2}{2at}$ …(答)

(3) l_tを変形して $xt^2+(a^2-2ay)t-a^2x=0$

すべてのtについて成り立つためには

$x=0$ かつ $a^2-2ay=0$ かつ $-a^2x=0$

$a>0$ より $x=0, y=\frac{a}{2}$ よって 定点 $\left(0, \frac{a}{2}\right)$ を通る(証明終)