2025 鳥取大・地域,農学(生命)[IV]・医(生命,保健)・工・獣医[I]

(1) $t=\sin\theta+\cos\theta$ の両辺を2乗して,

$t^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$t^2=1+\sin 2\theta$ から $\sin 2\theta=t^2-1$ なので

$f(\theta)=(t^2-1)+\sqrt{2}t$

$f(\theta)=\underline{t^2+\sqrt{2}t-1}$ …(答)

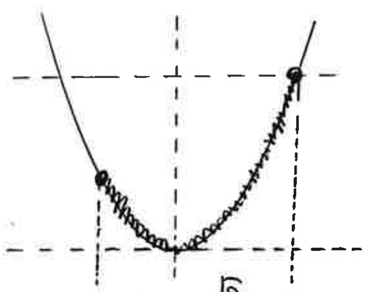
(2) $t=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ …①

$0\leqq\theta<2\pi$ より $\frac{\pi}{4}\leqq\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{9}{4}\pi$ なので $-1\leqq\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqq1$ から

$-\sqrt{2}\leqq\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqq\sqrt{2}$

$\underline{-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}}$ …(答)

(3) (1) より $f(\theta)=\left(t+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\frac{3}{2}$



(2) より $-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$ なので,
$f(\theta)=t^2+\sqrt{2}t-1$ の $-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$ における
概形は左図になる

(i) $t=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき, ① より $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}$ で $\frac{\pi}{4}\leqq\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{9}{4}\pi$ だから

$\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$

$\theta=\frac{11}{12}\pi,\ \frac{19}{12}\pi$

(ii) $t=\sqrt{2}$ のとき, ① より $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=1$ で $\frac{\pi}{4}\leqq\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{9}{4}\pi$ だから

$\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

$\theta=\frac{\pi}{4}$

以上より

(答) $\begin{cases}\text{最大値 } 3 & \left(\theta=\frac{\pi}{4}\text{ のとき}\right)\\ \text{最小値 } -\frac{3}{2} & \left(\theta=\frac{11}{12}\pi,\ \frac{19}{12}\pi\text{ のとき}\right)\end{cases}$

2025 鳥取大・医(生命,保健)・工・獣医

[Ⅱ]

(1) 公比をrとすると,③より

$$a_1+a_1r+a_1r^2=896$$

$$a_1(1+r+r^2)=896$$

②から $512(1+r+r^2)=896 \iff 4(1+r+r^2)=7$

整理して $-4r^2+4r-3=0 \iff (2r-1)(2r+3)=0$

$\therefore$ $a_n>0$ より $r>0$ だから $r=\frac{1}{2}$

したがって, $a_n=512\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=2^9\times 2^{1-n}$

$\underline{\underline{a_n=2^{10-n}}}$ …(答)

(2) $b_n=\log_2 a_n=\log_2 2^{10-n}=(10-n)\log_2 2$ なので

$\underline{\underline{b_n=10-n}}$ …(答)

(3) b_nは等差数列なのでS_nが最大となるのは,$b_n\geqq 0$の項をすべて加えたときである。(2)より

$b_n\geqq 0$ から $n\leqq 10$ $n=10$のとき,$b_{10}=0$ に注意すると

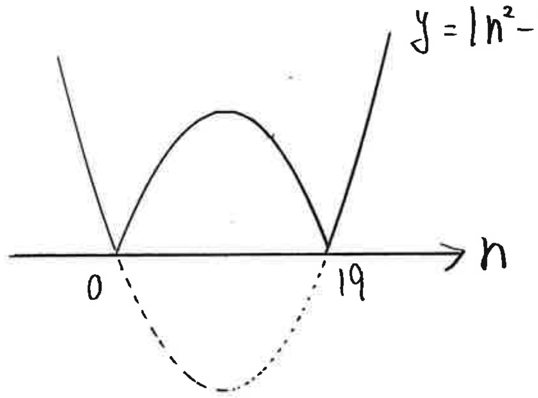
S_nが最大となる $\underline{n=9,10}$ …(答)

(4) $S_n=\sum_{k=1}^{n}b_k=\sum_{k=1}^{n}(10-k)=\frac{n\{9+(10-n)\}}{2}=\frac{-n^2+19n}{2}$ なので

$|S_n|=\left|\frac{-n^2+19n}{2}\right|=\frac{|n^2-19n|}{2}$ から

$|S_n|$が最小ということは$|n^2-19n|$が最小となればよいので

$y=|n^2-19n|$とおくと,$y=|n^2-19n|$のグラフの概形は下図になる。



nは自然数なので

$|S_n|$が最小となるのは $\underline{\underline{n=19}}$ …(答)

2025 鳥取大・医[Ⅱ]・医(生命,保健)・工・獣医[Ⅲ]

(1) $\dfrac{dx}{dt} = a e^{at}\cos t - e^{at}\sin t = \underline{\underline{e^{at}(a\cos t - \sin t)}}$ …(答)

$\dfrac{dy}{dt} = a e^{at}\sin t + e^{at}\cos t = \underline{\underline{e^{at}(a\sin t + \cos t)}}$ …(答)

(2) $|\vec{v}|^2 = \left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2 = e^{2at}(a\cos t - \sin t)^2 + e^{2at}(a\sin t + \cos t)^2$

$|\vec{v}|^2 = e^{2at}(a^2+1)(\sin^2 t + \cos^2 t) = e^{2at}(a^2+1)$

$|\vec{v}| \geqq 0$ より $|\vec{v}| = \underline{\underline{e^{at}\sqrt{a^2+1}}}$ …(答)

(3) $\vec{P} = (e^{at}\cos t,\ e^{at}\sin t)$ なので

$|\vec{P}|^2 = e^{2at}\cos^2 t + e^{2at}\sin^2 t = e^{2at}(\cos^2 t + \sin^2 t) = e^{2at}$

$|\vec{P}| \geqq 0$ より $|\vec{P}| = e^{at}$

$\vec{P}\cdot\vec{v} = e^{2at}(a\cos^2 t - \cos t\sin t) + e^{2at}(a\sin^2 t + \sin t\cos t)$

$= e^{2at} \times a(\cos^2 t + \sin^2 t)$

$\vec{P}\cdot\vec{v} = a e^{2at}$ なので

$\cos\theta = \dfrac{\vec{P}\cdot\vec{v}}{|\vec{P}||\vec{v}|} = \dfrac{a \times e^{2at}}{e^{at} \times e^{at}\sqrt{a^2+1}} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}$

ここで a は実数なので $-1 \leqq \dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}} \leqq 1$

また,$0 \leqq \theta \leqq \pi$ から $-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$

したがって,$\cos\theta$ の値は存在し,θ はtの値によらない定数である

(証明終)

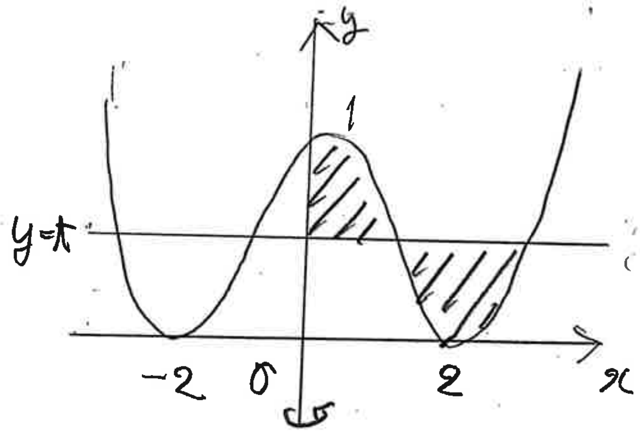
(4) $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ のとき,(3) より $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}} \Longleftrightarrow \sqrt{3(a^2+1)} = 2a$

$a \geqq 0$ において,両辺を2乗すると,$3(a^2+1) = 4a^2$

$a^2 = 3$

$a \geqq 0$ より $a = \underline{\underline{\sqrt{3}}}$ …(答)

2025 鳥取 医[Ⅲ]、工[Ⅳ]



(1) $t=\frac{1}{16}(x+2)^2(x-2)^2$ から

$(x^2-4)^2=16t$

$t \geqq 0$ より $x^2=4\pm4\sqrt{t}$

$\therefore R^2=4\pm4\sqrt{t}$ …(答)

(2) $y=\frac{1}{16}(x+2)^2(x-2)^2$ から $y\geqq0$ で

$x^2=4\pm4\sqrt{y}$ から $x_1^2=4-4\sqrt{y}$, $x_2^2=4+4\sqrt{y}$ とすると

$$V(t)=\int_0^t(\pi x_2^2-\pi x_1^2)\,dy+\int_t^1\pi x_1^2\,dy$$

$$=\pi\int_0^t 8\sqrt{y}\,dy+\pi\int_t^1(4-4\sqrt{y})\,dy$$

$$=\pi\left[8\times\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_0^t+\pi\left[4y-4\times\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_t^1$$

$$=\pi\left(8t\sqrt{t}-4t+\frac{4}{3}\right)$$ …(答)

(3) $V'(t)=\pi(12\sqrt{t}-4)$

$V'(t)=0$ とすると $\sqrt{t}=\frac{1}{3}$ より $t=\frac{1}{9}$

t	0	…	$\frac{1}{9}$	…	1
$V'(t)$		$-$	0	$+$	
$V(t)$		↘	最小	↗	

よって $t=\frac{1}{9}$ のとき 最小値 $\frac{32}{27}\pi$ …(答)