

数学 解答用紙

[医学部・医学科]

コード	得点	1	2	3
2	0			
7	8	11	12	14 15 17 18

採点欄

1

(1)  $D(x, y, z)$  とすると

$$x = \frac{(-2) \times 3 + 0 \times 1}{4} = -\frac{3}{2}, \quad y = \frac{3 \times 3 - 1 \times 1}{4} = 2, \quad z = \frac{(-4) \times 3 + 2 \times 1}{4} = -\frac{5}{2}$$

よって  $D(-\frac{3}{2}, 2, -\frac{5}{2})$  ... (答)

(2)  $\vec{n} = (l, l, m)$  とすると

$$\vec{n} \cdot \vec{OA} = l, \quad \vec{n} \cdot \vec{OB} = -l + 2m, \quad \vec{n} \cdot \vec{OC} = -2l + 3l - 4m$$

であるから

$$l = 1, \quad -l + 2m = 0, \quad -2l + 3l - 4m = 0 \quad \text{より} \quad l = \frac{1}{2}, \quad l = 1, \quad m = \frac{1}{2}$$

よって  $\vec{n} = (\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$  ... (答)

(3) H は以上の点であるから  $\vec{OH} = s\vec{OB} + t\vec{C} = (-2t, -1+3t, 2t-4t)$  と表すことができる。

$$\vec{AH} = \vec{OH} - \vec{OA} = (-2t, -1+3t+1, 2t-4t)$$

$$\vec{AH} \cdot \vec{OB} = 5s - 11t + 1 = 0 \quad \vec{AH} \cdot \vec{OC} = -11s + 29t - 3 = 0$$

であるから

$$s = t = \frac{1}{6}$$

よって  $H(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$  ... (答)

(4)  $\vec{BA} = (0, 2, -2)$   $\vec{BP} = (x, y+1, -2)$ ,

$$|\vec{BA}| = 2\sqrt{2} \quad |\vec{BP}| = \sqrt{x^2 + (y+1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 2y + 5}$$

$$\vec{BA} \cdot \vec{BP} = 2(y+1) + 4 = 2y + 6 \quad \text{である。}$$

$\angle ABP = 45^\circ$  であるから

$$2\sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + 2y + 5} \cdot \cos 45^\circ = 2y + 6 \quad \text{より}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + 2y + 5} = y + 3 \quad \text{① である。}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + 2y + 5} > 0 \quad \text{より} \quad y + 3 > 0 \quad \text{より} \quad y > -3$$

$$\text{① の両辺を二乗し、} \quad x^2 + y^2 + 2y + 5 = (y + 3)^2 \quad \text{より}$$

$$y = \frac{1}{4}x^2 - 1 \quad \text{であり、これより} \quad y > -3 \quad \text{を満たす。}$$

よって  $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$  ... (答)

数学 解答用紙

[医学部・医学科]

採点欄

2

$$(1) f_1(x) = 1 - \frac{\sin^2 x}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = 1 - 2\sin^2 x = \cos 2x \quad (\text{証明終})$$

以下  $\sin^2 x = X$  とする

$$\begin{aligned} (2) f_2(x) &= \left(1 - \frac{X}{\sin^2 \theta}\right) \left(1 - \frac{X}{\cos^2 \theta}\right) = 1 - \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} + \frac{1}{\cos^2 \theta}\right) X + \frac{X^2}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} \\ &= 1 - \frac{X(1-X)}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} = 1 - \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} = 1 - \frac{(\frac{1}{2} \sin 2x)^2}{(\frac{1}{2} \sin 2\theta)^2} \\ &= 1 - \frac{\sin^2 2x}{\sin^2 2\theta} = (\text{右辺}) \quad (\text{証明終}) \end{aligned}$$

(3)  $f_n(x) = \cos 2^n x$  ... ① と数学的帰納法で示す。

[1]  $n=1$  のとき (1) の①は成り立つ

[2]  $n=l$  のとき (1) が成り立つと仮定すると,  $\sin^2 x = X$  とし

$$\begin{aligned} f_l(x) &= \left(1 - \frac{X}{\sin^2 \frac{\pi}{2^{l+1}}}\right) \left(1 - \frac{X}{\sin^2 \frac{3\pi}{2^{l+1}}}\right) \cdots \left(1 - \frac{X}{\sin^2 \frac{2^l - 3}{2^{l+1}} \pi}\right) \left(1 - \frac{X}{\sin^2 \frac{2^l - 1}{2^{l+1}} \pi}\right) \\ &= \cos 2^l x \quad \dots \text{②} \end{aligned}$$

$n=l+1$  のとき

$$\begin{aligned} f_{l+1}(x) &= \underbrace{\left(1 - \frac{X}{\sin^2 \frac{\pi}{2^{l+2}}}\right)}_{\text{②}} \underbrace{\left(1 - \frac{X}{\sin^2 \frac{3\pi}{2^{l+2}}}\right)}_{\text{①}} \cdots \underbrace{\left(1 - \frac{X}{\sin^2 \frac{2^l - 3}{2^{l+2}} \pi}\right)}_{\text{①}} \underbrace{\left(1 - \frac{X}{\sin^2 \frac{2^l - 1}{2^{l+2}} \pi}\right)}_{\text{②}} \\ &= \underbrace{\left(1 - \frac{X}{\sin^2 \frac{\pi}{2^{l+2}}}\right)}_{\text{②}} \underbrace{\left(1 - \frac{X}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2^{l+2}}\right)}\right)}_{\text{①}} \times \underbrace{\left(1 - \frac{X}{\sin^2 \frac{3\pi}{2^{l+2}}}\right)}_{\text{①}} \underbrace{\left(1 - \frac{X}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2^{l+2}}\right)}\right)}_{\text{②}} \\ &\quad \times \cdots \times \underbrace{\left(1 - \frac{X}{\sin^2 \frac{2^l - 1}{2^{l+2}} \pi}\right)}_{\text{①}} \underbrace{\left(1 - \frac{X}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2^l - 1}{2^{l+2}} \pi\right)}\right)}_{\text{②}} \end{aligned}$$

$$= \left(1 - \frac{\sin^2 2x}{\sin^2 2x \frac{\pi}{2^{l+2}}}\right) \times \left(1 - \frac{\sin^2 2x}{\sin^2 2x \frac{\pi}{2^{l+1}}}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{\sin^2 2x}{\sin^2 2x \frac{\pi}{2^{l+1}}}\right)$$

( $\because$  ②①③)  $\Rightarrow$  ②①③ (2) の結果を用いて)

$$= \left(1 - \frac{\sin^2 2x}{\sin^2 \frac{\pi}{2^{l+1}}}\right) \left(1 - \frac{\sin^2 2x}{\sin^2 \frac{3\pi}{2^{l+1}}}\right) \cdots \left(1 - \frac{\sin^2 2x}{\sin^2 \frac{2^l - 1}{2^{l+1}} \pi}\right)$$

$$= f_2(2x) \quad (\because \text{②} \text{より})$$

$$= \cos 2^l \times 2x$$

$$= \cos 2^{l+1} x \quad (\text{よ} \Rightarrow n=l+1 \text{ のときも } \textcircled{1} \text{ は成り立つ})$$

[1][2] ④  $\forall n \in \mathbb{N}$  整数  $n$  に対して

$$f_n(x) = \cos 2^n x \text{ が成り立つ (証明終)}$$

受験番号					
1	2	3	4	5	6

この線より上には解答を記入しないでください。

数学 解答用紙

[医学部・医学科]

採点欄

3

(1)  $y = \cos ax$  は  $y' = -a \sin ax$  となる  $(t, \cos at)$  における接線の方程式は

$$y - \cos at = -a \sin at (x - t)$$

この式で  $x = 0$  として  $y = \cos at + at \sin at$

よって  $f(t) = \cos at + at \sin at \dots$  (答)

(2)  $\int at \sin at dt = -t \cos at + \int \cos at dt = -t \cos at + \frac{1}{a} \sin at + C$ ,  $\int \cos at dt = \frac{1}{a} \sin at + C$  (Cは積分定数)

$f = at$   $g' = \sin at$

$f' = a$   $g = -\frac{1}{a} \cos at$

よって  $I(a) = \int_0^\pi f(t)g'(t) dt = \int_0^\pi (\cos at + at \sin at) dt = \left[ \frac{2}{a} \sin at - t \cos at \right]_0^\pi$

$= \frac{2 \sin \pi a}{a} - \pi \cos \pi a \dots$  (答)

(3)  $\lim_{a \rightarrow +0} I(a) = \lim_{a \rightarrow +0} \left( \frac{2 \sin \pi a}{a} - \pi \cos \pi a \right)$

$= \lim_{a \rightarrow +0} \left( 2\pi \frac{\sin \pi a}{\pi a} - \pi \cos \pi a \right)$

$= 2\pi - \pi$

$= \pi \dots$  (答)